

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σεπτέμβριος 2023

Διδάσκοντες: Χ. Σαρόγλου και Μ. Σταματάκης

~~Θέμα 1 (1 μον.)~~ Να λυθούν οι εξισώσεις

$$(\alpha) \sin(2x) = 2 \cos(x) \quad \text{και} \quad (\beta) \cos(2x) = \cos(x).$$

~~Θέμα 2 (1 μον.)~~ Έστω p, q λογικές προτάσεις. Να εξετάσετε αν η πρόταση

$$(\sim p) \wedge q \implies p \vee [p \iff (\sim q)]$$

είναι ταυτολογία.

~~Θέμα 3 (1.5 μον.)~~ (α) Έστω $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$ σύνολα. Να δείξετε ότι αν $A \cap \Gamma = \emptyset$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε

$$A \cup B = (A \cup \Gamma) \cap (\Gamma^c \cup B).$$

(β) Έστω A, B , σύνολα. Να δείξετε ότι

$$(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta).$$

~~Θέμα 4 (1.5 μον.)~~ Δείξτε ότι η σχέση \sim που ορίζεται στο $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ως

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2$$

είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε το σύνολο πηλίκου.

~~Θέμα 5 (2 μον.)~~ (α) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^4$ και $A = [-2, -1] \cup [1, 4] \subseteq \mathbb{R}$. Βρείτε τα σύνολα $f^{-1}(f(A))$ και $f(f^{-1}(A))$.

(β) Έστω $f: X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ ισχύει ότι

$$(1) A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{και} \quad (2) f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

Δείξτε ότι αν η f είναι 1-1 τότε η (1) ισχύει ως ισότητα και αν η f είναι επί του Y τότε η (2) ισχύει ως ισότητα.

(γ) Έστω $f: X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Ονομάζουμε ένα σύνολο $A \subseteq X$ κορεσμένο ως προς την f αν $A = f^{-1}(f(A))$. Δείξτε ότι για κάθε $A \subseteq X$ το σύνολο $f^{-1}(f(A))$ είναι κορεσμένο ως προς την f .

~~Θέμα 6 (2 μον.)~~ (α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη-κενά. Ορίζουμε $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(β) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Ισχύει ότι

$$\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

~~Θέμα 7 (2 μον.)~~ Να διατυπώσετε τον ορισμό του πότε δύο σύνολα είναι ισοπληθικά και χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό να δείξετε ότι τα σύνολα $(-1, 1)$ και \mathbb{R} είναι ισοπληθικά.

Καλή επιτυχία!